

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

計畫編號: NSC 89-2416-H-004-058

計畫名稱: 退休基金評價的最適提撥策略與資產負債管理

執行期限: 89年8月1日至90年7月31日

計畫主持人: 張士傑 國立政治大學風險管理與保險學系教授

## 摘要

提撥政策與資產配置是退休基金管理的重要議題，本研究應用隨機控制理論，以長期基金規劃的觀點，尋求各期之最適資產配置及提撥金額，為充分反映退休基金管理時所面臨的不確定因素，以隨機微分方程式描述退休基金所累積資產與應計負債的動態隨機性質，建構連續時間的隨機控制模型，並給定衡量風險的評估測度量化退休基金於管理期間的經營績效，利用 Bellman-Dreyfus 方程式求出最適的基金提撥與資產配置策略。最終以勞動基準法規範下的企業退休金計劃為實証對象，透過動態模擬與數值方法，連結控制理論與情境模擬，藉以檢視現行固定給付退休基金之最適策略，所討論的方法可作為基金決策者財務規劃與後續研究之參考。

**關鍵字：**提撥政策；資產配置；評估測度；最適策略；動態規劃。

## Abstract

Funding policy and asset allocation are two critical issues in pension fund management. In this study, stochastic differential equations are constructed to describe the dynamics of the fund levels and the accrued liabilities. A stochastic control model with given risk measurement is formulated in a continuous-time framework to investigate the optimal strategy. In our approach, the plan's normal costs and accrued liabilities are simulated through plausible scenarios while the optimal contribution and asset allocation are solved through Bellman-Dreyfus

equation. A monitoring mechanism linking plausible scenarios and the closed-form solutions are employed to scrutinize the funding policy and asset allocation for the defined benefit pension scheme. The optimal strategies are estimated through dynamic programming for a sample pension scheme under the Taiwan labor standards law to illustrate our proposed methodology. Geometric Brownian motions are used to model the assets held by the fund manager. Constrains and procedures in achieving the optimal solutions are explained and the numerical results are also investigated.

**Keywords:** funding policy, asset allocation, risk measurement, optimal strategy, dynamic programming.

## 一、計畫緣由及目的

就基金的投資而言，控制理論對於多年期的最佳投資組合提供動態且穩健的方法(諸如 Brennan 與 Schwartz, 1982; Merton, 1990; Brennan, Schwartz 與 Lagnado, 1997; Boyle 與 Yang, 1997; Brennan 與 Schwartz, 1998 等)。近年來，最適控制理論已逐漸應用至與退休金相關之財務精算領域(諸如 O'Brien, 1986, 1987; Cairns, 2000)，針對退休基金的管理而言，需要倚賴穩健的提撥政策與最佳的資產配置，達成長期基金資

產與應計負債的相互配合。因此本研究運用動態控制聯結情境模擬與最適過程，尋求特定的策略以降低管理者所面臨的經營風險，透過基金資產與應計負債隨機過程的建構，提供基金多期管理的評估模式，同時也可以有效的預估基金未來的財務動態。以動態隨機過程分析退休基金，將能夠符合基金運作的現況，本研究基於風險極小化的目標利用動態規劃求得最佳解，輔助決策者於基金管理時能夠同時兼顧資產配置與提撥政策。

傳統的退休基金精算評價及資產配置大都侷限於單期模型，但多數投資標的報酬率並非以單期評估，諸如債券的期望報酬率是由到期殖利率估計而得，股票價格是由股利貼現模型來計算，而單期的期望報酬率和估計長期的內部投資報酬率成比例，故無法使用單期策略性規劃。同時伴隨著電子商務的交易模式，資訊的快速傳達與揭露，使財務的運作近乎連續，因此退休基金以動態隨機模型描述有其必要性。運用隨機模擬的優點在於可以清楚地描述基金成員的變化，諸如成員離職的預測，同時藉由動態資產配置可得到較佳的投資績效，透過最適化的動態策略，可以達到降低提撥風險與清償風險的目的，傳統的定期評價僅能夠針對給定的精算假設檢視基金的財務狀況，而控制理論能夠針對

管理的需求輔助決策者修正基金提撥與投資策略。

## 二、結果與討論

我們將利用動態控制理論模型探討固定給付退休金計劃之最適策略，本研究的實証對象為某台灣半導體電子公司，政府基於保障員工的基礎下施行勞動基準法，於 1984 年強制雇主給予員工退休給付，至 1998 年，此法適用的對象為所有具雇主員工關係者，目前將近七百六十萬合格的工作者受到此法的保護，法令中規定計劃贊助者必須提撥員工薪資 2%至 15%成立基金，作為未來員工給付之用，並且有最低保證收益之規定，若基金投資未達保證收益時，將由國庫補貼，由於並沒有勞工退休基金的提撥與給付之間的關係，因此雇主要負擔清償的風險。

根據現行台灣勞基法第 53 與 54 條的規定，員工具有下列條件之一者，是為自願退休，得領取退休金：(1)工作滿十五年，且年滿五十五歲者，(2)工作滿二十五年者。而強迫退休年齡則為六十歲，基金成員若具有退休的條件，可領到一筆退休金。而未能達到勞基法規定的服務年資或年齡而離職者，無法得到退休金且無賦益給付，勞工退休基金屬於固定給付型式的退休金，退休金的給付計算公式乃依據員工的服務年資與薪

資水準訂定（退休時可領之退休金＝基數×退休前六個月之平均薪資），而基數的決定為服務年資的前十五年，每年二個基數，十五年之後的，每年一個基數，六個月以上未滿一年者，以一年計，最高不得超過四十五個基數，若員工發生屬於工作上的意外災害，則雇主亦須負有賠償責任。為簡化實證分析，在此僅考慮退休部分的基金政策，其餘之撫恤金未列入考量。

為簡化最適過程之複雜計算，於(11)式中我們使用 $C_t$ 的平方來衡量雇主對於提撥的考量，

$$L(t, X_t, \{C_t, p_t\}) = C_t^2 + k(\eta AL_t - F_t)^2$$

(11) 此風險評估將顯著影響基金的最適結果，決策者可以將其他因素列入管理上的考量，而另外決定風險評估函數，以反映基金權衡穩定性與清償能力間的重要程度。

關於實證的假設，條列如下：

- 規劃時間為期十年，每週評價一次，且每週都提撥金額至基金，因此時間單位為週。
- 員工年滿六十歲即退休，並且具領有退休給付的資格，若在之前離職者，即使滿足勞基法規定之自願退休條件，基金並無負任何退休撫恤金給付之責，基金僅考慮年滿六十歲強迫退休者，其餘情形不納入考量。
- 退休給付為：退休時的薪資×基數，異於勞動基準法規定的「退休前六個月之平均薪資」，至於基數的算法則同於勞基法。
- 假設兩種資產為此研究的投資選擇，以民國 70 年至 88 年台股指數平均週報酬率作為風險資產之平均報酬率，即 $\delta_1 = 0.362\%$ ，週標準差 $\sigma_{11} = 4.44\%$ ，於 $t$ 時，佔總資產比例為 $p_t$ ，無風險資產以現行中央政府公債之殖利率為依據，給定為 $6\%$ ，若採連續計息方式計算，則每週所得之利息 $\delta_2 = \ln(1.06)/52$ ，週標準差 $\sigma_{22} = 0$ ，佔總資產比例為 $1 - p_t$ ，不考慮違約風險情形。
- 基金成員共 2,768 人，採取開放團體模型，允許成員進出基金，但維持同樣的人數，一旦成員離職或退休，即有人遞補。
- 不考慮成員暫時離職，成員一旦離職，就不能再回到原基金。
- 薪資每年以 $3\%$ 成長。
- 評價利率 $r = \ln(1.07)/52$ ，用以計算應計負債與正常成本，本研究採用加入年齡正常成本法（Entry Age Normal Actuarial Cost Method），進入基金年齡等於進入公司的年齡，評估測度的無風險利率

$$\rho = \ln(1.06)/52。$$

- 假設起始時間點為 0，基於精算評價時的財務資訊，給定基金資產起始值  $F_0 = 254,823,637(\text{NT})$ ，應計負債起始值  $AL_0 = 380,688,220(\text{NT})$ ，係數  $\eta = 0.75、0.9、1.0$  作為比較之用，比重  $k = 0.6 \times 10^{-4}$ 、 $1.0 \times 10^{-4}$ 、 $1.2 \times 10^{-4}$  用以平衡基金資產與提撥金額因不同規模而造成的影響，因為每年的正常成本較累積的應計負債為小，為避免因為標準不同，產生最適化時偏向於最小化清償風險而忽略提撥風險，因此取較小的  $K$  值，希望能夠同時極小下兩種風險。

### 三、計畫成果自評

本文利用決策經濟模型研究最適策略，因為於離散時間下的最適控制解的求法較為複雜，因此採用連續時間模型描述基金動態變化，針對利用所推導之最適化理論實証後所得到的結果，歸納包括基金累積資產、基金比率、提撥水準與投資比例的結果如下：(1) 基金資產此方法下基金資產有顯著遞增的趨勢，漸漸的趨向所欲達成的目標， $\eta$  與  $k$  同樣的與基金資產具有正向的關係，由於  $k$  值過小，相較之下， $\eta$  造成的差異性較大，設定基金資產的目標對於基金累積的資產有明顯的影響。(2). 基金比率

於最適化策略下，基金比率先遞增隨後遞減，但遞增的速度較遞減的速度快，比較不同的  $\eta$  與  $k$ ，結果顯示  $\eta$  對於基金比例有較明顯的影響，而  $k$  幾乎沒有多大的變化，可能與  $k$  的變動幅度小有關。 $\eta$  與基金比率呈現正向關係，基金比率中期以後，一直維持  $\eta$  的水準，顯示最適規劃能夠輔助基金比率達到其預定值，基金具有相當的清償能力。(3) 最適提撥 由於時間以週為單位，可以清楚地檢視基金未來十年的最適成本，最適提撥水準的特色在於，早期雇主所負擔的成本較重，然而隨著資產的累積，退休金成本逐漸減少，最適提撥策略受到  $\eta$  的影響，當  $\eta$  愈大，代表預定的目標愈高，自然需要提撥的金額就愈多。(4) 最適配置 於最適化策略下，隨著時間的增加投資在風險性資產的比重愈少，這表示資產面的管理初期著重在收益面，後期則是著重在安全面，同樣的， $\eta$  影響最適投資結果較明顯， $\eta$  愈大，投資在風險性資產的比重愈大，基金資產較易達到預期的水準。

運用控制模型於退休金財務規劃，可突破傳統精算評價方法的限制，它不僅可考慮決策者的主觀目標，而且與風險評估結合，於此退休基金管理的控制架構，風險衡量在決策過程中扮有重要的角色，不論在建構最適資產組合，或者針對策略的效率而言，風險衡量在退休

基金管理上提供彈性的評估指標。

#### 四、參考文獻(摘要)

1. Anderson, A. W. (1992), Pension Mathematics for Actuaries, 2<sup>nd</sup> ed. Winsted, Connecticut : Actex Publication, 1992.
2. Bellman, R. (1957), Dynamic Programming, Princeton, N.J. : Princeton University Press.
3. Boyle, P. and Yang, H. (1997), "Asset Allocation with Time Variation in Expected Returns." Insurance : Mathematics and Economics 21, pp.201-218.
4. Brennan, M.J. and Schwartz, E. S. (1998), "The Use of Treasury Bill Futures in Strategic Asset Allocation Programs. " In Worldwide Asset and Liability Modeling, J. M. Mulvey and W. T. Ziemba, Eds. Cambridge University Press, pp.205-230.
5. Brennan, M.J., Schwartz, E.S. (1982), "An Equilibrium Model of Bond Pricing and A Test of Market Efficiency." Journal of Financial and Quantitative Analysis 17, pp.301-329.
6. Brennan, M. J., Schwartz, E. S. and Lagnado, R. (1997), "Strategic asset allocation." Journal of Economics, Dynamics and Control 21(8-9), pp.1377-1403.
7. Cairns, A. J. G. (2000), "Some Notes on The Dynamics and Optimal Control of Stochastic Pension Fund Models in Continuous Time." ASTIN Bulletin 30(1), pp.19-55.
8. Cairns, A. J. and Parker, G. (1997), "Stochastic Pension Fund Modeling." Insurance: Mathematics and Economics 21, pp.43-79.
9. Chang, S. C. (1999), "Optimal Pension Funding Through Dynamic Simulations: the Case of Taiwan Public Employees Retirement System." Insurance: Mathematics and Economics 24, pp.187-199.
10. Chang, S. C. (1999), "Stochastic Analysis of the Solvency Risk for TAI-PERS Using Simulation-based Forecast Model." Singapore International Insurance and Actuarial Journal 3(1), pp.65-81.
11. Chang, S. C. (2000), "Realistic Pension Funding: A Stochastic Approach." Journal of Actuarial Practice 8, pp.5-42.
12. Dufresne, D. (1988), "Moments of Pension Contributions and Fund Levels when Rates of Return are Random." Journal of the Institute of Actuaries 115, pp.535-544.
13. Dufresne, D. (1989), "Stability of pension systems when rates of return are random." Insurance: Mathematics and Economics 8, pp.71-76.
14. Haberman, S. and Sung, J. H. (1994), "Dynamic Approaches to Pension Funding." Insurance: Mathematics and Economics 15, pp.151-162.
15. Merton, R. (1990), Continuous-Time Finance, Blackwell, Cambridge.
16. O'Brien, T. (1986), "A Stochastic-dynamic Approach to Pension Funding." Insurance: Mathematics and Economics 5, pp.141-146.
17. O'Brien, T. (1987), "A Two-parameter Family of Pension Contribution Functions and Stochastic Optimization." Insurance: Mathematics and Economics 6, pp.129-134.
18. Winklevoss, H. E. (1993), Pension Mathematics with Numerical Illustrations, 2<sup>nd</sup> edition, Pension Research Council Publications.